

# 透明マントの設計方法と メタマテリアル

富山県立大学  
落合 友四郎  
公立はこだて未来大学  
ホセ・ナチュエル

# 目次

1、透明マンツの歴史

2、メタマテリアル

3、異方性マテリアルによる透明マンツ

4、等方性マテリアルによる透明マンツ

# 透明マント



ハリーポッターの透明マント

映画「007」の透明になる車

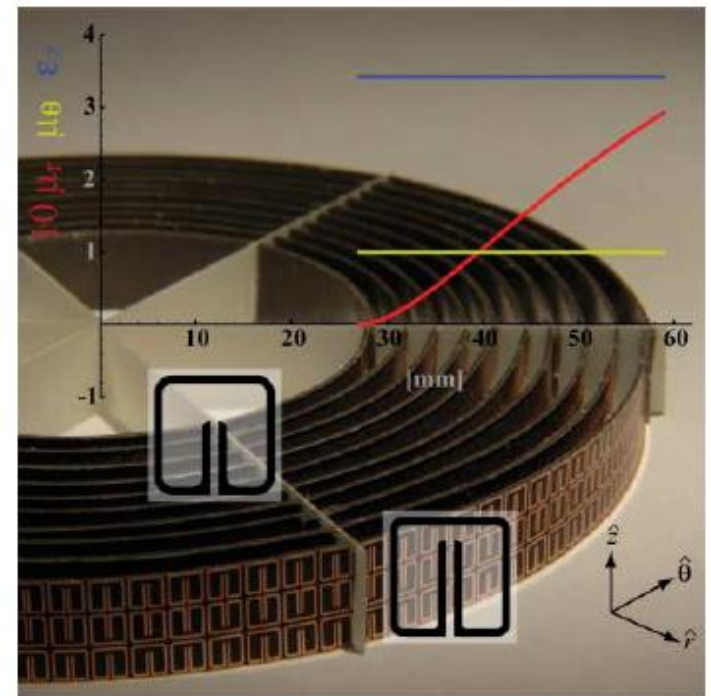
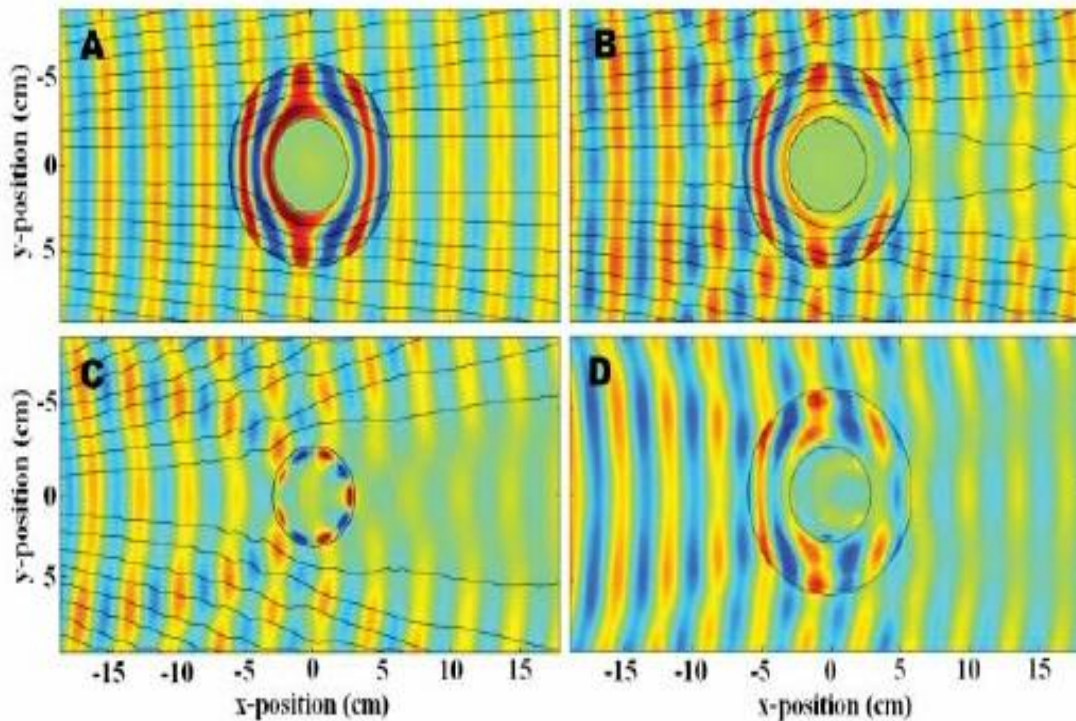
# 透明マント設計の歴史（1）

- 2006年 異方性媒質を用いた透明マントの提案  
(J. B. Pendry et al., Science 312, 1780 (2006))
- 2006年 マイクロ波領域での透明マントの実験  
(D. Schurig et al., Science 314, 977 (2006))
- 2006年 等方性媒質を用いた透明マントの提案  
(U. Leonhardt, Science 312, 1777 (2006))
- 2008年 負の屈折率を用いた透明マントの提案  
(T. Ochiai, U. Leonhardt and J.C. Nacher,  
J. Math. Phys. 49, 032903 (2008))

# 透明マント設計の歴史（2）

2006年 マイクロ波領域での透明マントの実験

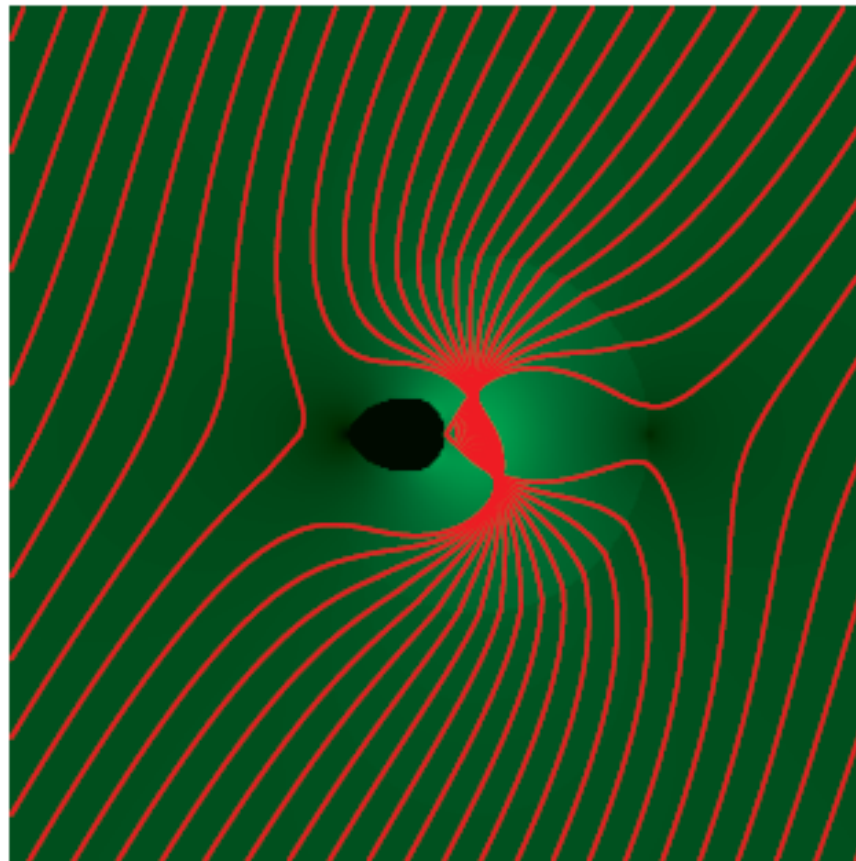
(D. Schurig et al., Science 314, 977 (2006))



# 透明マント設計の歴史（3）

2006年 等方性媒質を用いた透明マントの提案

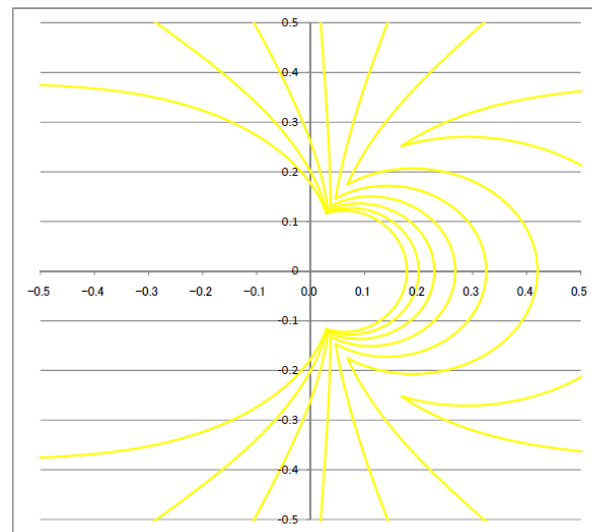
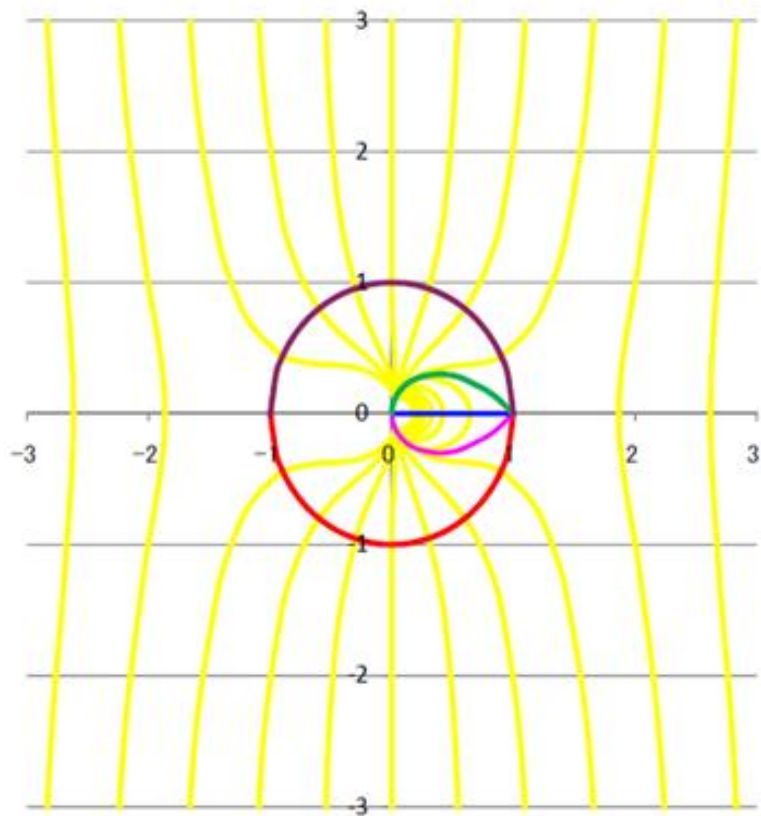
(U. Leonhardt, Science 312, 1777 (2006))



# 透明マント設計の歴史（４）

2008年 負の屈折率を用いた透明マントの提案

(T. Ochiai, U. Leonhardt and J.C. Nacher,  
J. Math. Phys. 49, 032903 (2008))



左図の中心部の拡大図

# 透明マンツの設計のステップ

透明マンツの設計には、以下のような段階を踏むことになるだろう。

## 第1段階

透明マンツにするにはどの場所にどのような誘電率、透磁率をもつ物質は配置すればよいかを設計する。(そのような誘電率、透磁率をもつ物質をどのように製造するかは問わない。)

## 第2段階

第1段階で必要になった誘電率や透磁率を持つ物質 (メタマテリアル) の設計をする。(必要なメタマテリアル群の設計)

## 第3段階

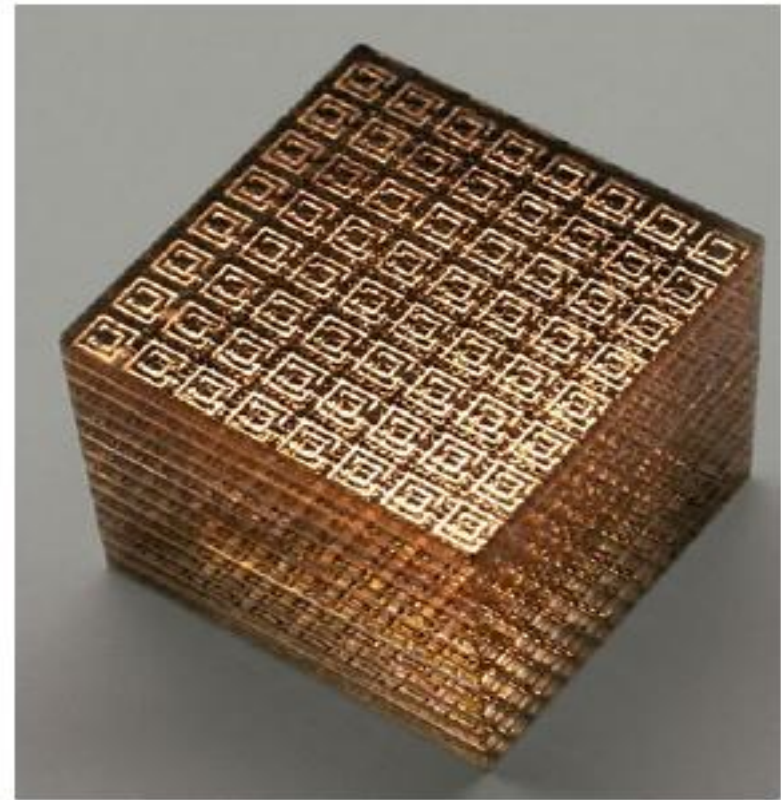
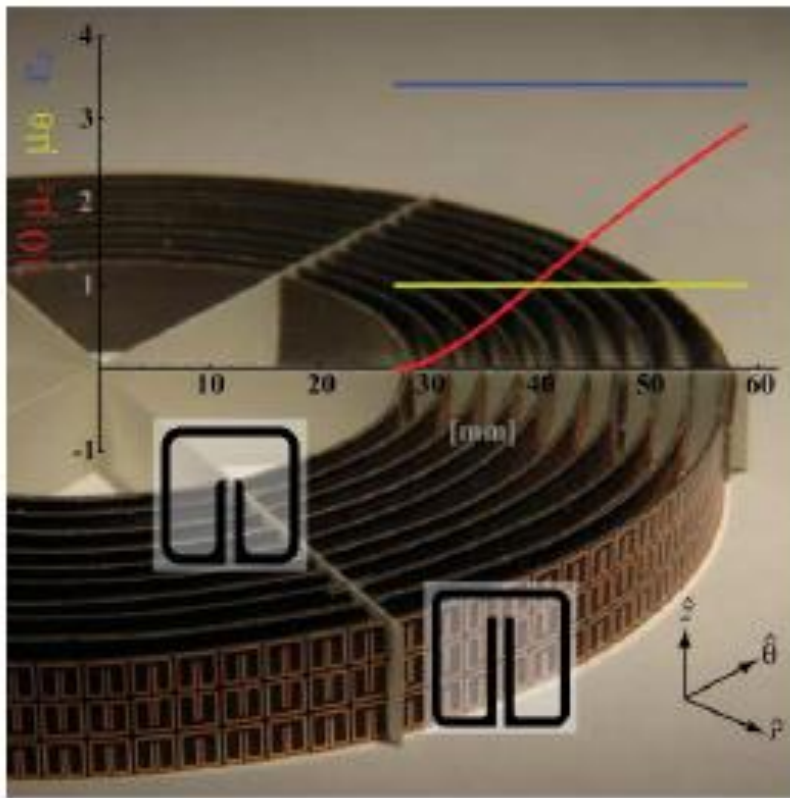
第1段階、第2段階で得られた設計を基に実際に透明マンツを製造する。



# メタマテリアルとは何か

1. ある種の幾何学構造をもつ金属の構造体を周期的に配置する。その構造体が考えている電磁波の波長より小さい時、その周期的構造体群は電磁的に連続媒質とみなすことができ、**メタマテリアル**と呼ばれる。
2. このように作られたメタマテリアルは、自然界に存在する物質では実現不可能であるような性質をもつ。特に誘電率、透磁率の両方が負になるメタマテリアルのことを**左手系メタマテリアル**という。

# メタマテリアルの例



(D. Schurig et al., Science 314, 977 (2006))

*(DRS&JBP(final).doc at 20/02/2004 page 1 of 8  
December 2003 Physics Today)*

# 物質中のマックスウェル方程式

物質中での電磁波の振る舞いは、物質中のマックスウェル方程式により記述される。

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

ここで、 $\varepsilon$ は誘電率、 $\mu$ は透磁率

# 平面波が物質中に侵入すると、

電磁波が平面波とする。

$$\vec{E} \propto \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad \vec{H} \propto \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x})$$

すると、物質中のマックスウェル方程式は以下のようなになる。

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$



$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu$$

Kが実数になるためには、、、

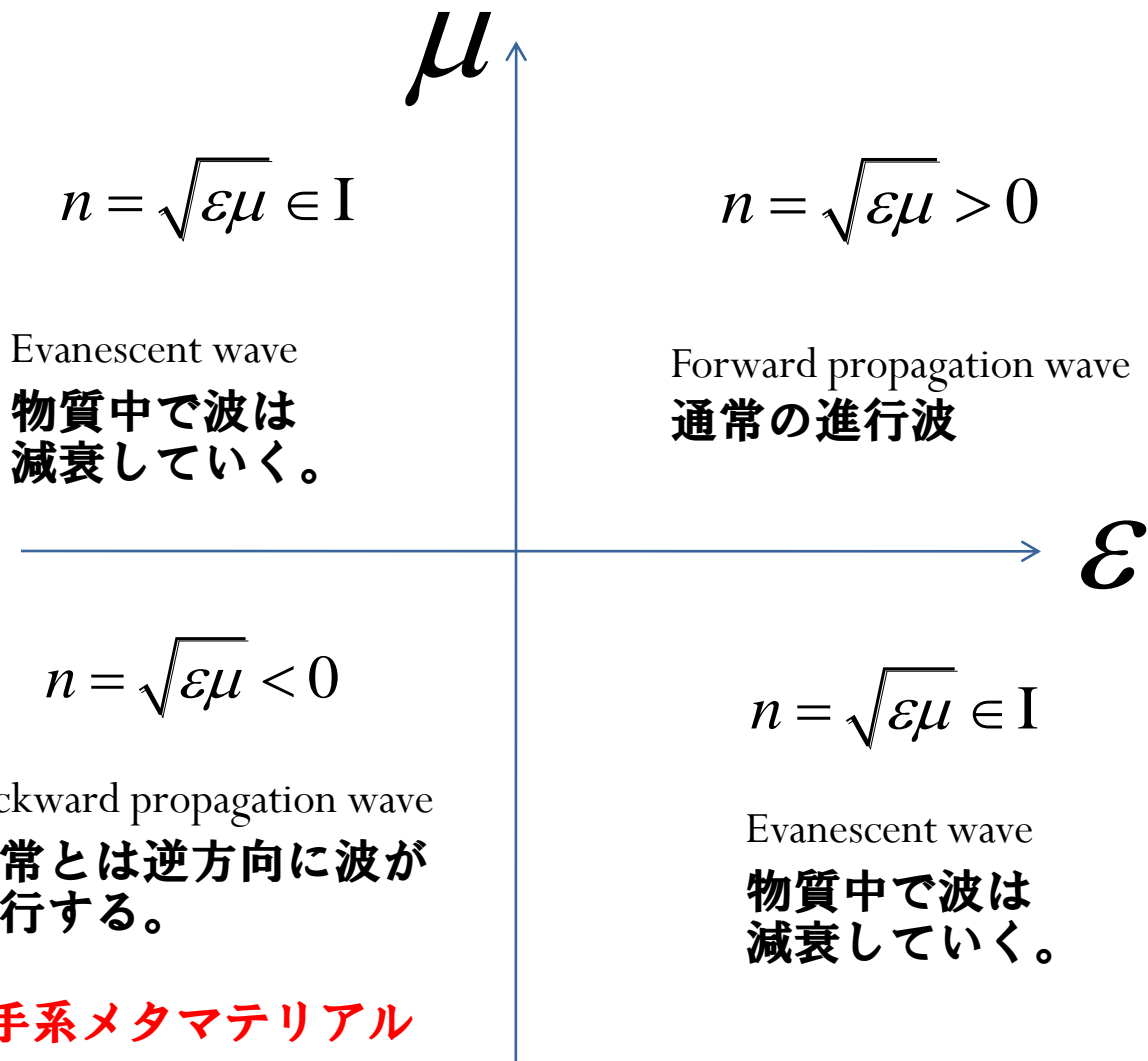
# 左手系メタマテリアル

- 電磁波が物質中に侵入するには、 $k$ が実数でないといけないので、次の2つの可能性がある。

①  $\epsilon$ と $\mu$ の両方が共に正の値をとる。  
(自然界に存在する通常物質)

②  $\epsilon$ と $\mu$ の両方が共に負の値をとる。  
(**左手系メタマテリアル**  
Left handed metamaterial  
Negative Refraction Metamaterial)

# 誘電率、透磁率と屈折率のダイアグラム

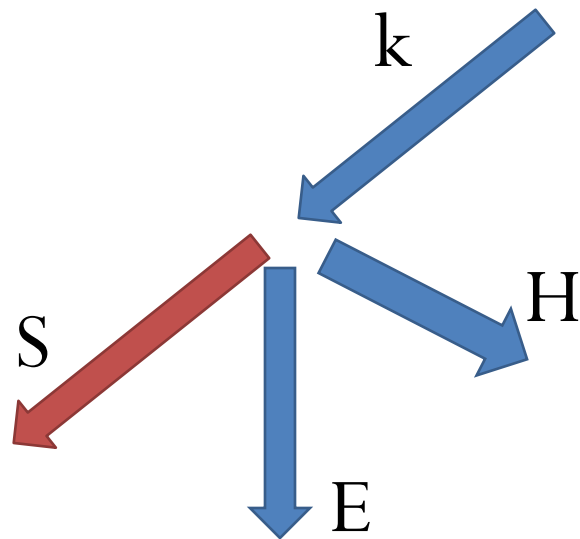


# 左手系メタマテリアルの性質

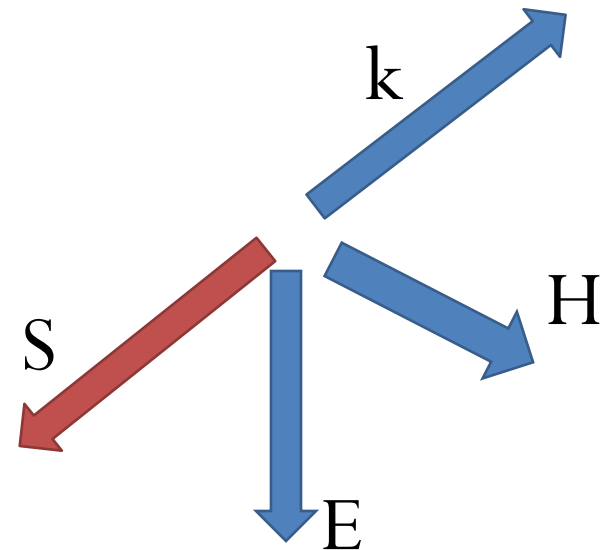
- 1、屈折率が負になる。
- 2、エネルギーの流れと位相速度は逆になる。  
(群速度も逆にするメタマテリアルもある。)
- 3、Snellの法則において、光線の軌道が通常とは逆に「くの字」に曲がる。
- 4、等方性媒質ですべての角度で反射をゼロにする境界を作ることができる。

# RHMとLHM

通常のマテリアル  
(RHM)



左手系メタマテリアル  
(LHM)

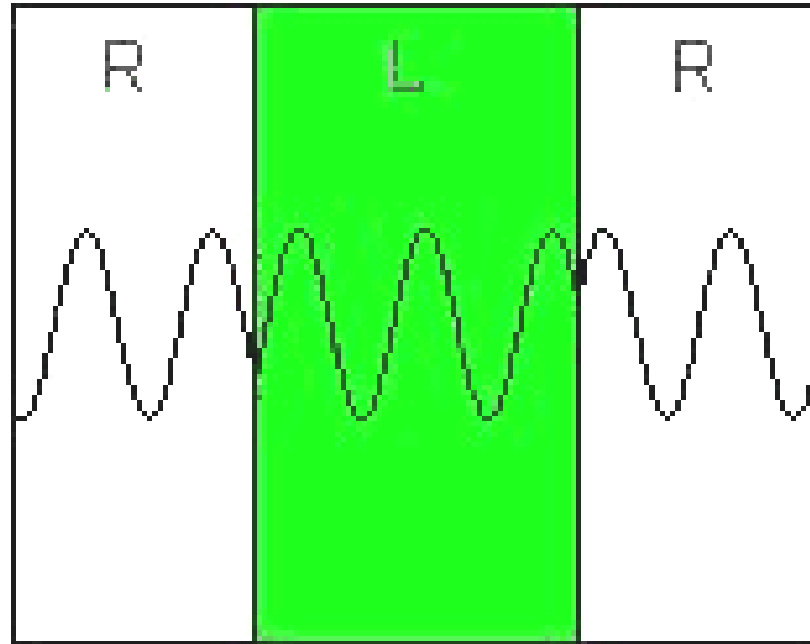


1、 $\epsilon$ と $\mu$ の両方が負である媒質では、 $\mathbf{k}$  (wave vector) とEとHは、通常の媒質と異なり、左手系をなす。(左手系メタマテリアル)

2、左手系メタマテリアルでは、 $\mathbf{k}$  とPoynting vector  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ は逆向きである。(エネルギーの流れとwave vector  $\mathbf{k}$ は逆向きになる。)



# 左手系メタマテリアルのシミュレーション



左手系メタマテリアルでは、位相速度が逆になっている。

# 負の屈折率（１）

- 左手系メタマテリアルの位相速度

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} = c^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} < 0$$

- 左手系メタマテリアルの屈折率

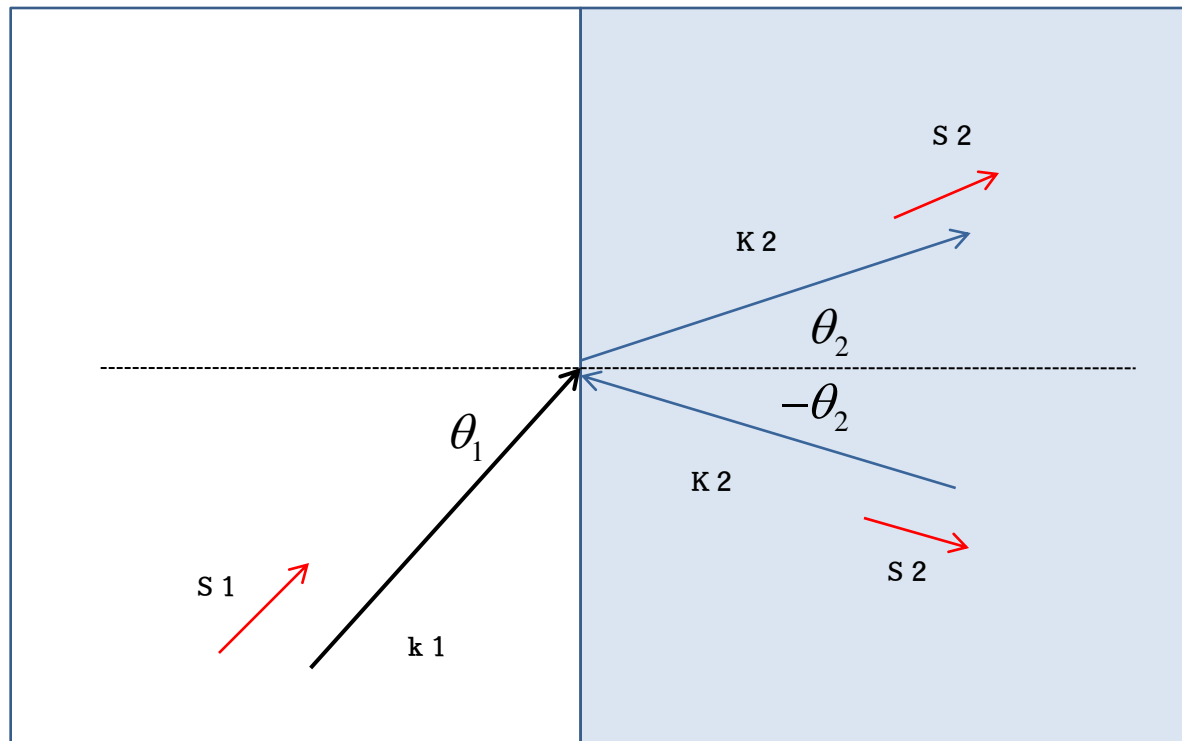
$$n = \frac{c}{v_{\phi}} = \sqrt{\epsilon \mu} < 0$$

$$\sqrt{(-1)^2} = -1$$

に注意

左手系メタマテリアルでは屈折率は負になる。

# 負の屈折率（２）



$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n$$

屈折率が負になると、「くの字」に曲がる。

# 左手系メタマテリアルの反射の性質 (1)

i. Eが入射面に垂直の時、反射率は以下であたえられる。

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}} \cos \phi - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}}{\sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}} \cos \phi + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}},$$

ii. Eが入射面に平行の時、反射率は以下であたえられる。

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cos \phi - \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cos \phi + \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}}.$$

# 左手系メタマテリアルの反射の性質 (2)

(1) インピーダンスマッチングの場合 ( $Z=Z'$ )

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos \phi - \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}}{\cos \phi + \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}}.$$

等方性媒質の場合、一般的には屈折率が不連続になる境界では、すべての角度で反射をゼロにすることができない。  
ところが、

# 左手系メタマテリアルの反射の性質 (3)

(2) 垂直入射の時、

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} - \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}.$$

(3) 2つの媒質の間の誘電率と透磁率に  $\epsilon = -\epsilon'$  and  $\mu = -\mu'$  の関係がある時、すべての角度で反射がゼロになる。

$$\frac{E_r}{E_i} = 0.$$

# メタマテリアルの構成法

メタマテリアルの構成法にはさまざまな方法がある。代表的なものとして

1、伝送線路理論によるメタマテリアル

2、分割リング共振器によるメタマテリアル  
(SSR: Split-Ring Resonator)

# 異方性媒質を用いた透明マント

- 透明マントを設計するために、数学的な仮想的空間と実際に透明マントが存在する物理的空間の2つを用意する。

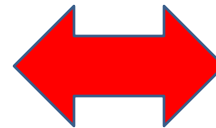
数学的空間  
(仮想的な空間)

物質の存在しない曲った空間 (真空)

空間が曲がっているために光が曲がる (重力効果)

重要なパラメーター：  
計量テンソル  
 $g^{ij}$

対応関係



物理的空間

物質が存在して、誘電率、透磁率が変化する異方性媒質の空間

異方性媒質で誘電率、透磁率が変化するために光が曲がる

重要なパラメーター：  
誘電率、透磁率テンソル  
 $\epsilon^{ij}, \mu^{ij}$



# 物質中のマックスウェル方程式 (物理的空間)

物質中のマックスウェル方程式は以下で与えられる。

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

ここで、 $\varepsilon$ は誘電率、 $\mu$ は透磁率で、異方性媒質の場合、テンソルとなる。

# 一般座標空間におけるマックスウェル方程式

一般座標系で物質中のマックスウェル方程式を書きなおすと、次のようになる。

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\partial_i (\sqrt{\gamma} D^i) = \sqrt{g} \rho \rightarrow \sqrt{\gamma} \rho$$

$$\partial_i (\sqrt{\gamma} B^i) = 0$$

$$[ijk] \partial_j E_k = -\frac{\partial (\sqrt{\gamma} B^i)}{\partial t}$$

$$[ijk] \partial_j H_k = \frac{\partial (\sqrt{\gamma} D^i)}{\partial t} + \sqrt{\gamma} j^i \quad (4)$$

$$D^i = \varepsilon_0 \varepsilon^{ij} E_j$$

$$B^i = \mu_0 \mu^{ij} H_j$$

# 真空中のマックスウェル方程式 (数学的空間)

一方、真空中のマックスウェル方程式は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

# 一般座標空間におけるマックスウェル方程式

一般座標系で真空中のマックスウェル方程式を書きなおすと、次のようになる。

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} E^i) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\partial_i (\sqrt{g} B^i) = 0$$

$$[ijk] \partial_j E_k = -\frac{\partial (\sqrt{g} B^i)}{\partial t}$$

$$[ijk] \partial_j B_k = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\sqrt{g} E^i)}{\partial t} + \mu_0 \sqrt{g} j^i$$

# 物理的空間と数学的空間の関係 (1)

前式の一般座標系で真空中のマックスウェル方程式で、 $B^i \rightarrow \mu_0 H^i$  と変数を書きなおして、あらためて次のような変数を定義する。

$$D^i = \varepsilon_0 \varepsilon^{ij} E_j \quad B^i = \mu_0 \mu^{ij} H_j$$

$$\varepsilon^{ij} = \mu^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} g^{ij}$$

# 物理的空間と数学的空間の関係 (2)

すると、次のような方程式群が成立することがわかる。

$$\partial_i (\sqrt{\gamma} D^i) = \sqrt{g} \rho \rightarrow \sqrt{\gamma} \rho$$

$$\partial_i (\sqrt{\gamma} B^i) = 0$$

$$[ijk] \partial_j E_k = -\frac{\partial (\sqrt{\gamma} B^i)}{\partial t}$$

$$[ijk] \partial_j H_k = \frac{\partial (\sqrt{\gamma} D^i)}{\partial t} + \sqrt{\gamma} j^i$$

この方程式群は  
(4) 式と同じ

# 計量テンソルと誘電率、透磁率の関係

よって、曲った空間中における光が曲がることを、物質中で誘電率、透磁率が変化することにより光が曲がることと同一視することができる。

$$\epsilon^{ij} = \mu^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} g^{ij}$$

誘電率、透磁率が変化する  
物質空間中で光が曲がる

曲った真空空間中で光が曲がる

# 異方性媒質における透明マントの設計

次に計量テンソルと誘電率と透磁率の関係を用いて、

- (1) 柱状の透明マント (異方性媒質)
- (2) 球状の透明マント (異方性媒質)

の設計をする。



# 柱形状の透明マント（1）

柱形状の透明マントを数学空間上で次のように中心を膨らませることにより設計する。

$$r' = \frac{b-a}{b} r + a$$

$$\theta' = \theta$$

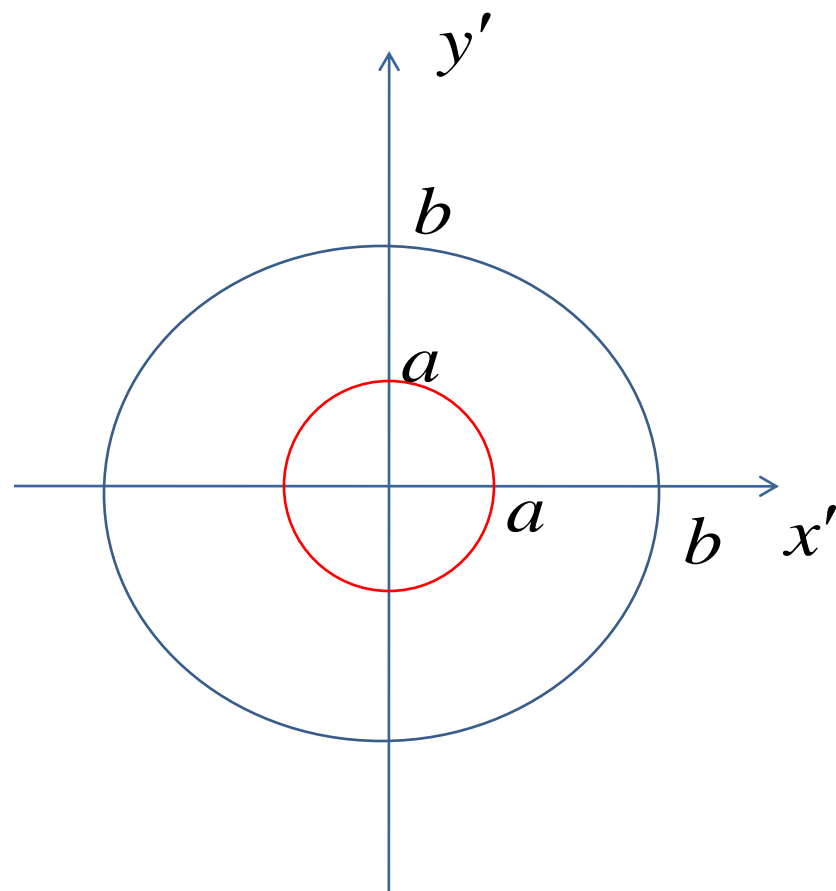
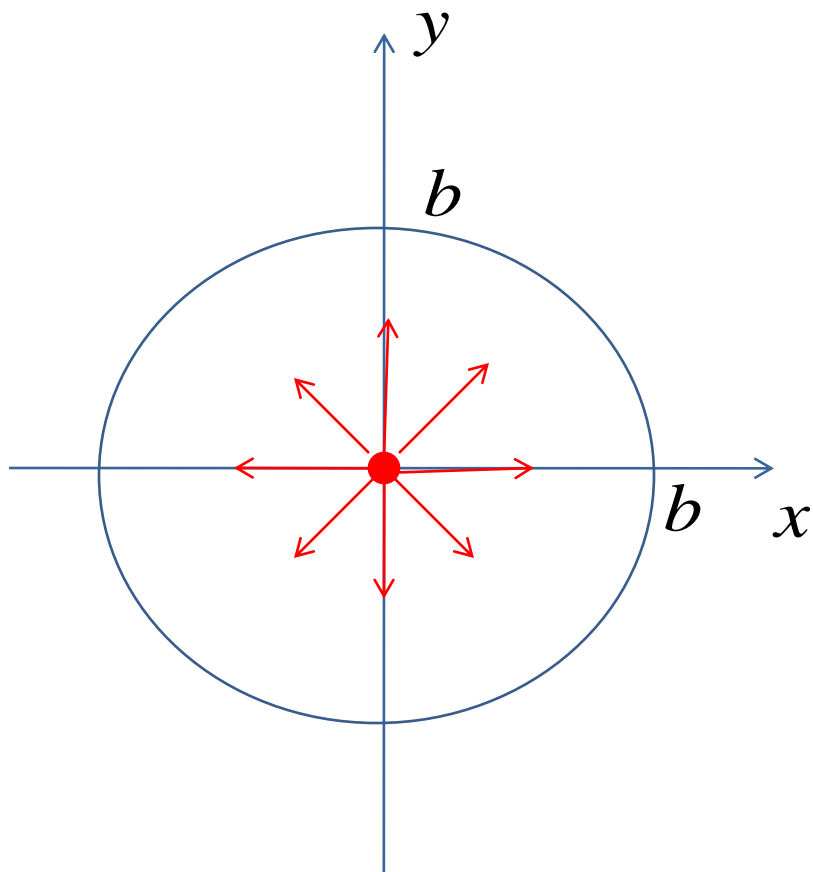
$$z' = z$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z'$$

中心を膨らませると、



Mathematical space

$(x, y, z)$

$(r, \theta, z)$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

柱形状の透明マント

Physical space

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

$$= \gamma_{11} dr'^2 + \gamma_{22} d\theta'^2 + \gamma_{33} dz'^2$$

$(x', y', z')$

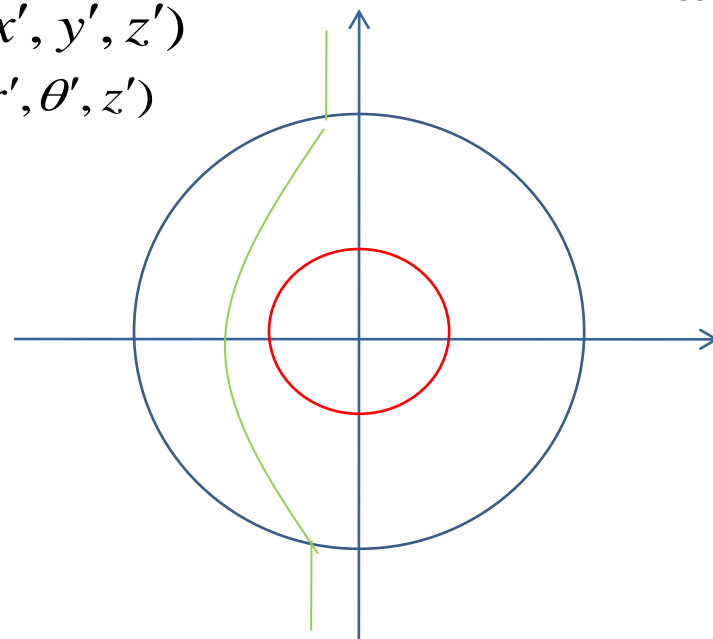
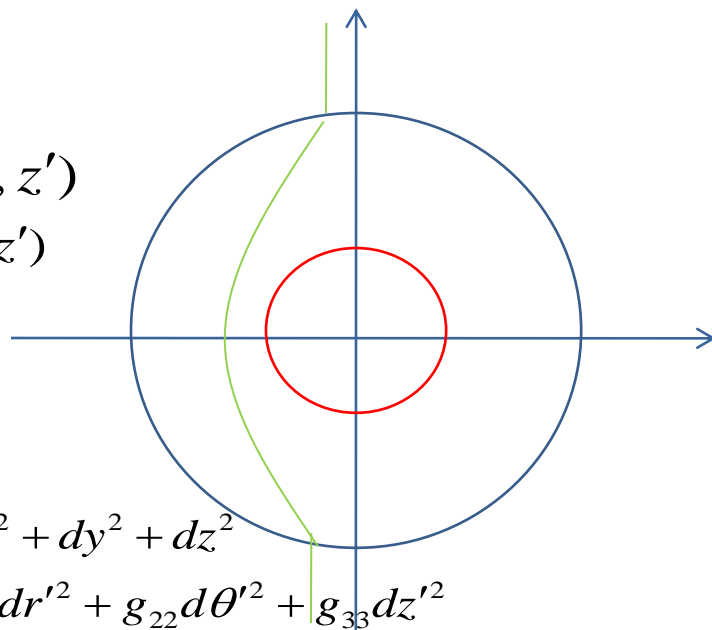
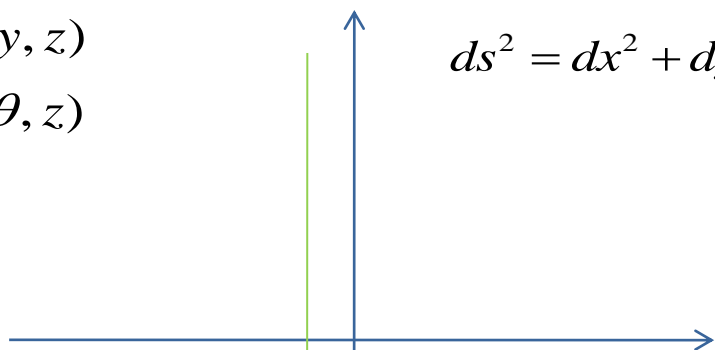
$(r', \theta', z')$

$(x', y', z')$

$(r', \theta', z')$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= g_{11} dr'^2 + g_{22} d\theta'^2 + g_{33} dz'^2$$



## 柱形状の透明マント（２）

- 柱形状の透明マントは以下のような誘電率、透字率を与えることにより設計できる。

$$\varepsilon_1^1 = \varepsilon_r = \frac{r' - a}{r'}$$

$$\mu_1^1 = \mu_r = \frac{r' - a}{r'}$$

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_\theta = \frac{r'}{r' - a}$$

$$\mu_2^2 = \mu_\theta = \frac{r'}{r' - a}$$

$$\varepsilon_3^3 = \varepsilon_z = \left( \frac{b}{b - a} \right)^2 \frac{r' - a}{r'}$$

$$\mu_3^3 = \mu_z = \left( \frac{b}{b - a} \right)^2 \frac{r' - a}{r'}$$

# 球形状の透明マント（1）

- 球形状の透明マントを数学空間上で次のように中心を膨らませることにより設計する。

$$r' = \frac{b-a}{b} r + a$$

$$\theta' = \theta$$

$$\phi' = \phi$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Mathematical space

$(x, y, z)$

$(r, \theta, \phi)$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

球形状の透明マント

Physical space

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

$$= \gamma_{11} dr'^2 + \gamma_{22} d\theta'^2 + \gamma_{33} d\phi'^2$$

$(x', y', z')$

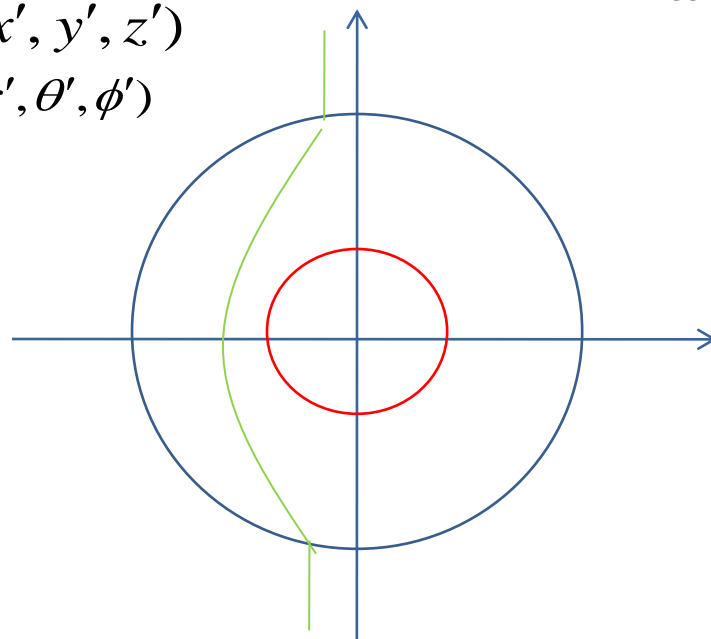
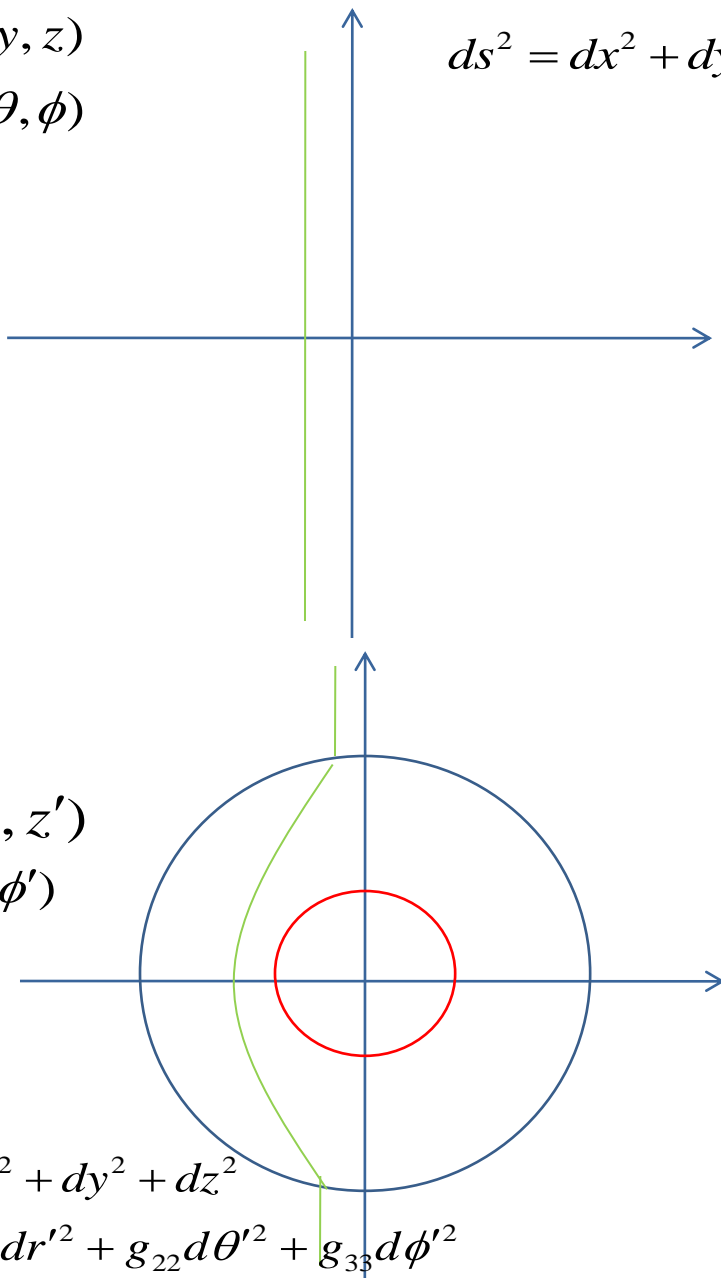
$(r', \theta', \phi')$

$(x', y', z')$

$(r', \theta', \phi')$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= g_{11} dr'^2 + g_{22} d\theta'^2 + g_{33} d\phi'^2$$



## 球状の透明マント（2）

柱形状の透明マントは以下のような誘電率、透字率を与えることにより設計できる。

$$\varepsilon_1^1 = \varepsilon_r = \frac{b}{b-a} \left( \frac{r'-a}{r'} \right)^2$$

$$\mu_1^1 = \mu_r = \frac{b}{b-a} \left( \frac{r'-a}{r'} \right)^2$$

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_\theta = \frac{b}{b-a}$$

$$\mu_2^2 = \mu_\theta = \frac{b}{b-a}$$

$$\varepsilon_3^3 = \varepsilon_\phi = \frac{b}{b-a}$$

$$\mu_3^3 = \mu_\phi = \frac{b}{b-a}$$

# 透明マントの実験（1）

2006年にマイクロ波領域でおこなわれた柱状透明マントの実験を紹介する。

(D. Schurig et al., Science 314, 977 (2006))

$$\varepsilon_1^1 = \varepsilon_r = \frac{r' - a}{r'}$$

$$\mu_1^1 = \mu_r = \frac{r' - a}{r'}$$

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_\theta = \frac{r'}{r' - a}$$

$$\mu_2^2 = \mu_\theta = \frac{r'}{r' - a}$$

$$\varepsilon_3^3 = \varepsilon_z = \left( \frac{b}{b - a} \right)^2 \frac{r' - a}{r'}$$

$$\mu_3^3 = \mu_z = \left( \frac{b}{b - a} \right)^2 \frac{r' - a}{r'}$$

誘電率、透磁率が距離とともに複雑に変化するので、このままでは実際に透明マントを製造するのは難しい。



## 透明マントの実験（２）

電場が z 軸に平行の場合を考える。するとマックスウェル方程式は以下のようなになる。

$$\frac{1}{\mu_{\theta}\epsilon_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{\mu_r\epsilon_z} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \omega^2 E_z = 0$$

すると、以下の条件を満たせば、誘電率、透磁を変化させても、電磁波のふるまいは変わらない。

(ただし、電場が z 軸に平行の場合に限るが、)

$$\mu_{\theta}\epsilon_z = \text{constant}$$

$$\mu_r\epsilon_z = \text{constant}$$

# 透明マントの実験（3）

- 電場が z 軸に平行の場合は以下のパラメータでも透明マントになる。

$$\mu_1^1 = \mu_r = \left( \frac{r' - a}{r'} \right)^2$$

$$\mu_2^2 = \mu_\theta = 1$$

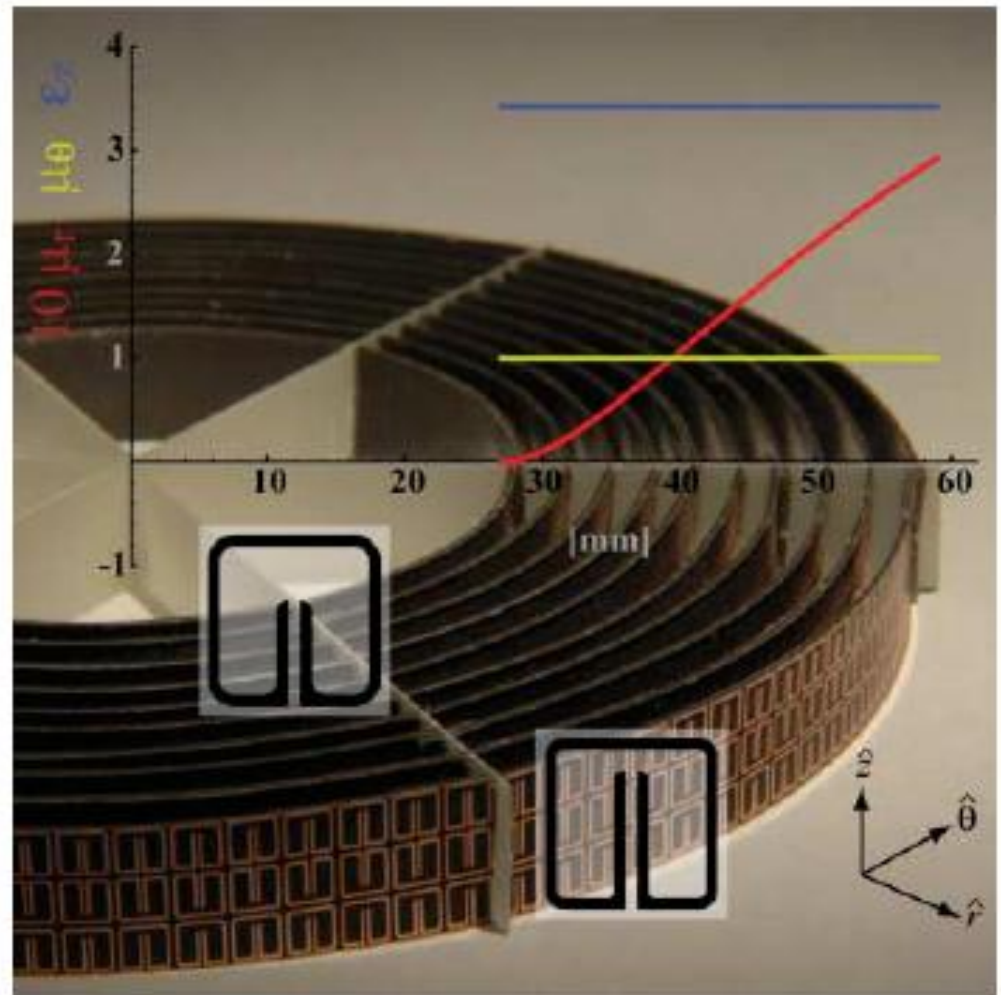
$$\varepsilon_3^3 = \varepsilon_z = \left( \frac{b}{b - a} \right)^2$$



より簡単なパラメーター  
になっている。

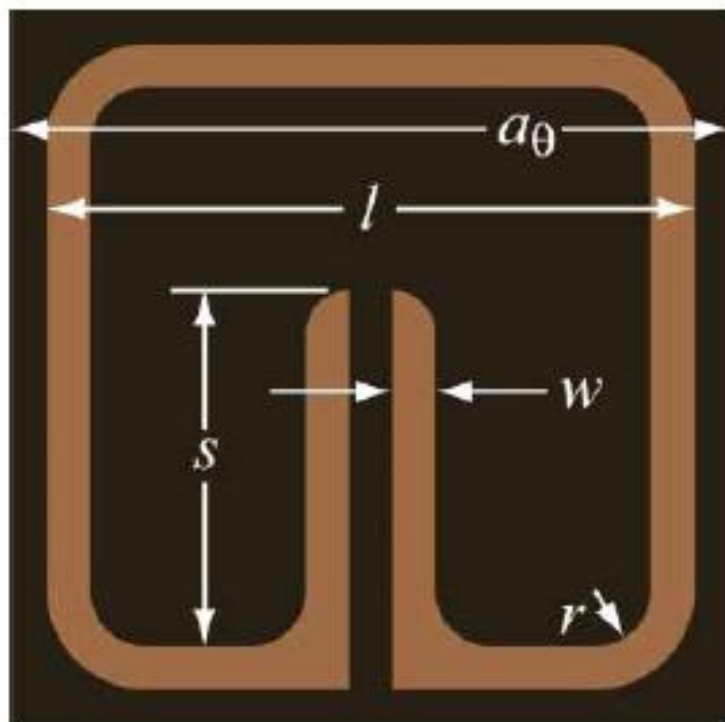
# 透明マントの実験（４）実験例

**Fig. 1.** 2D microwave cloaking structure (background image) with a plot of the material parameters that are implemented.  $\mu_r$  (red line) is multiplied by a factor of 10 for clarity.  $\mu_\theta$  (green line) has the constant value 1.  $\epsilon_z$  (blue line) has the constant value 3.423. The SRRs of cylinder 1 (inner) and cylinder 10 (outer) are shown in expanded schematic form (transparent square insets).



# 透明マントの実験 (5)

## メタマテリアルのデザイン



cyl.	$r$	$s$	$\mu_r$
1	0.260	1.654	0.003
2	0.254	1.677	0.023
3	0.245	1.718	0.052
4	0.230	1.771	0.085
5	0.208	1.825	0.120
6	0.190	1.886	0.154
7	0.173	1.951	0.188
8	0.148	2.027	0.220
9	0.129	2.110	0.250
10	0.116	2.199	0.279

# 等方性メタマテリアルを用いた透明マント

- 異方性マテリアルを用いた透明マントには、誘電率、透磁率が方向によって異なるように変化するので、製造が難しいという問題がある。
- また、Pendry氏の透明マントは媒質境界において、誘電率、透磁率がゼロになり、位相速度が無限大になるという問題がある。
- そこで、等方性マテリアルをもちいた透明マントの製造を考える。

# 計量テンソルと誘電率、透磁率の関係

よって、曲った空間中における光が曲がることを、物質中で誘電率、透磁率が変化することにより光が曲がることと同一視することができる。

$$\epsilon^{ij} = \mu^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} g^{ij}$$

誘電率、透磁率が変化する  
物質空間中で光が曲がる

曲った真空空間中で光が曲がる

# 異方性マテリアルと等方性マテリアル

- 異方性マテリアル 一般座標変換

$$\varepsilon^{ij} = \mu^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} g^{ij}$$

- 等方性マテリアル 共形変換

$$g^{ij} = n^2 \delta^{ij}$$

# 等方性マテリアルを用いた時の問題

## 等方性マテリアルを用いた透明マントの問題点

- 時間遅れ (Time delay)
- 反射 (Reflection)

Nachmanの定理は、等方性マテリアルを用いた完全な（時間遅れ、反射なし）の透明マントは不可能であることを示している。

負の屈折率を用いたマテリアル（左手系メタマテリアル）を用いることにより、この不可能定理を回避できる。



# 負の屈折率をもつマテリアル (左手系メタマテリアル)の性質

1、屈折率が負になる。

(Snellの法則において、光線の軌道が通常とは逆に「くの字」に曲がる。)

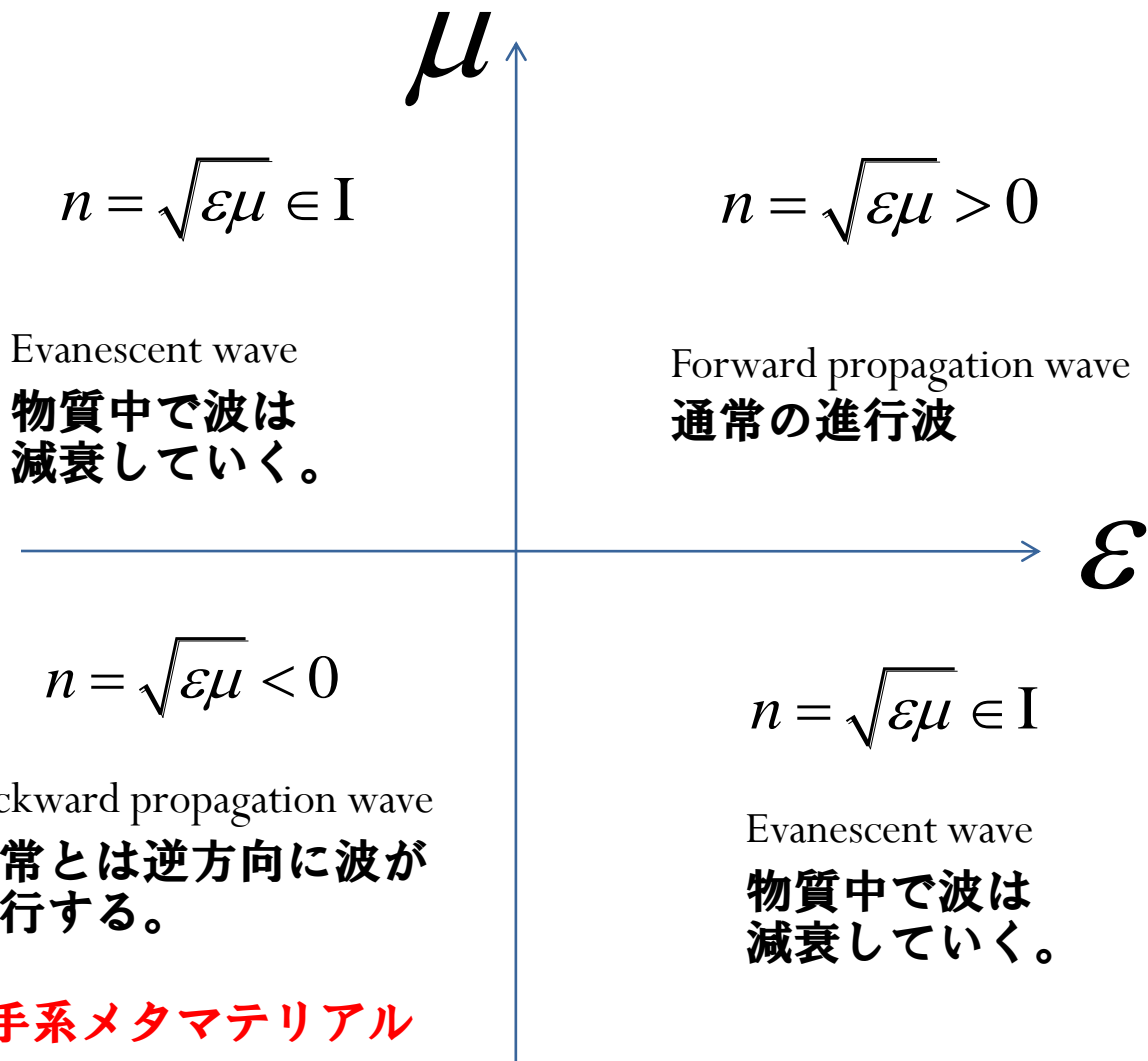
2、エネルギーの流れと位相速度は逆になる。

(群速度も逆にするメタマテリアルもある。)

3、等方性媒質ですべての角度で反射をゼロにする境界を作ることができる。

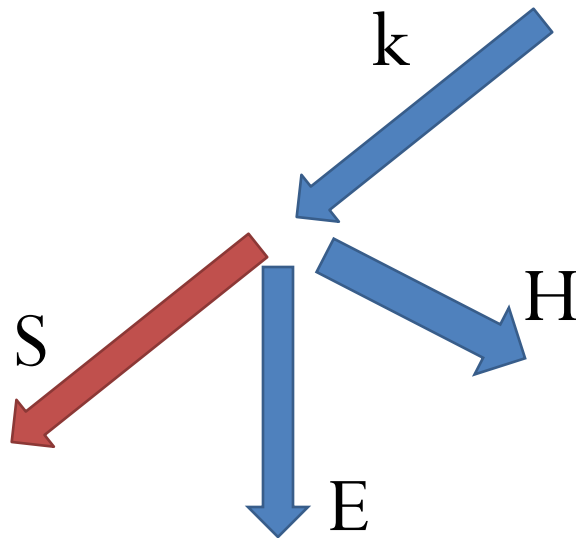
応用：完全レンズ

# 誘電率、透磁率と屈折率のダイアグラム

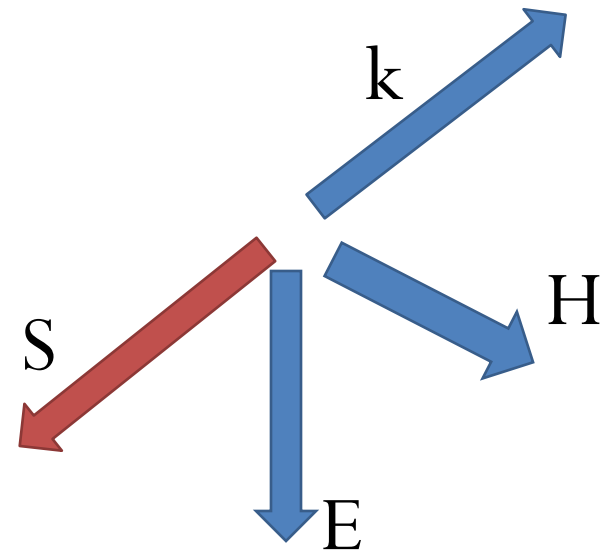


# RHMとLHM

通常のマテリアル  
(RHM)



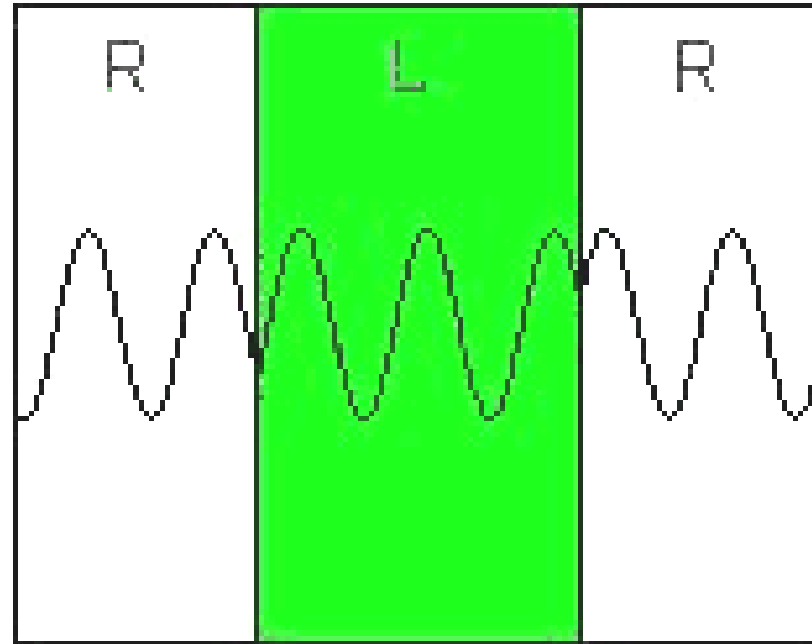
左手系メタマテリアル  
(LHM)



1、 $\epsilon$ と $\mu$ の両方が負である媒質では、 $\mathbf{k}$  (wave vector) とEとHは、通常の媒質と異なり、左手系をなす。(左手系メタマテリアル)

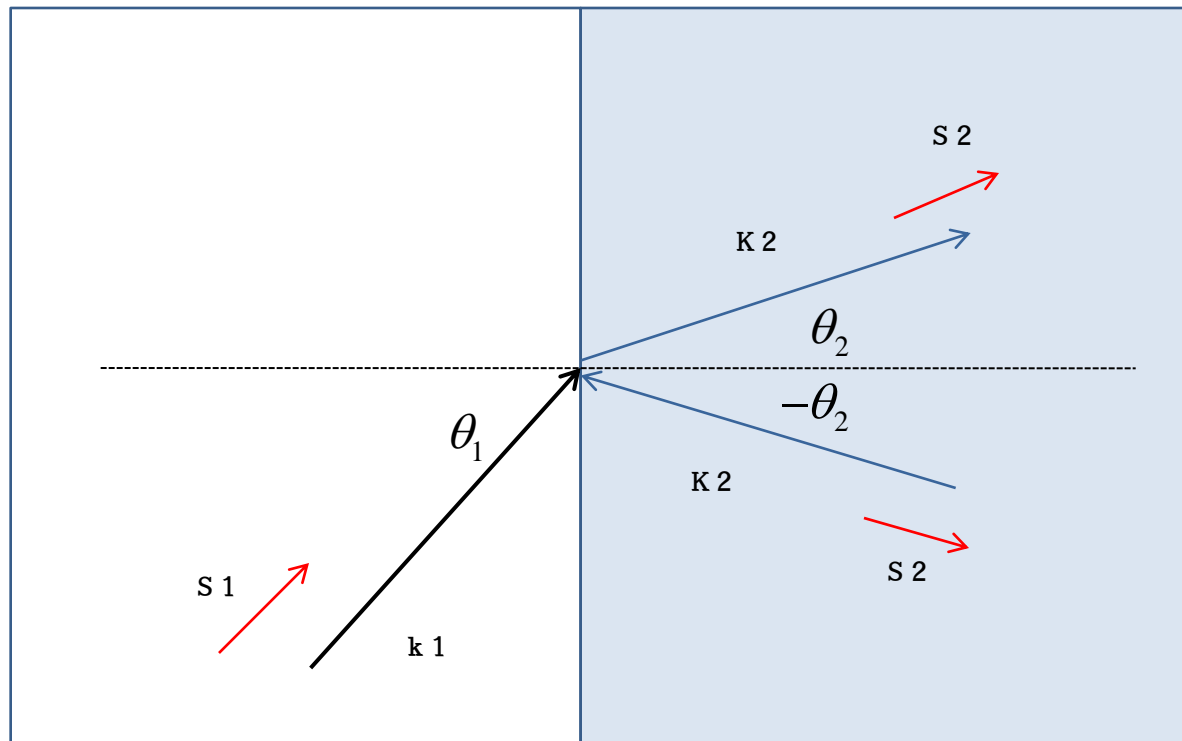
2、左手系メタマテリアルでは、 $\mathbf{k}$  とPoynting vector  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ は逆向きである。(エネルギーの流れとwave vector  $\mathbf{k}$ は逆向きになる。)

# 左手系メタマテリアルのシミュレーション



左手系メタマテリアルでは、位相速度が逆になっている。

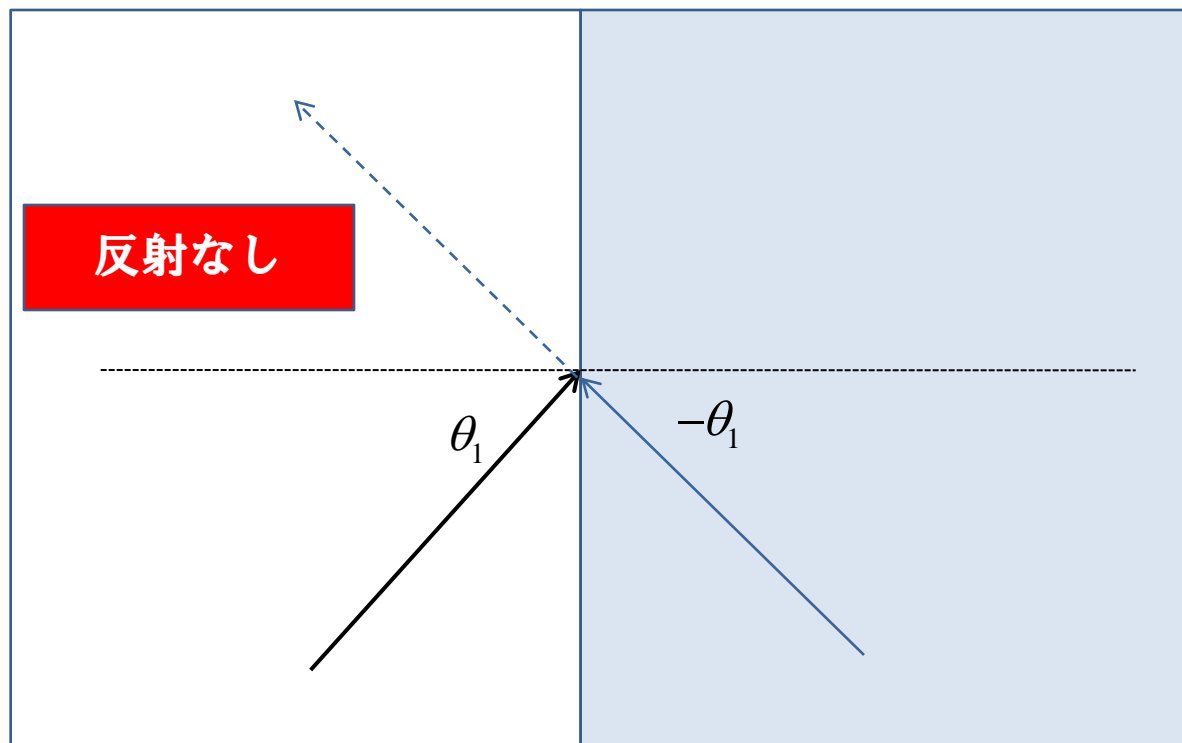
# 負の屈折率（２）



$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n$$

屈折率が負になると、「くの字」に曲がる。

# あらゆる入射角度で反射ゼロの境界



2つの媒質の間の誘電率と透磁率に  $\epsilon = -\epsilon'$  and  $\mu = -\mu'$   
の関係がある時、**すべての角度で反射がゼロになる。**

# 研究結果

- Nachmanの定理を回避して、負の屈折率を持つマテリアルをもちいて等方性マテリアルによる**完全な**透明マントを構成（デザイン）した。

具体的には

## 1, 時間遅れなし（位相遅延なし）

The time delay is zero.

## 2, 反射がゼロ

the reflection is also zero.

# 構成方法

1、共形変換を用いる。

利点：マテリアルの等方性を保証する

2、負の屈折率をもつマテリアルを用いる。

利点：

時間遅れをゼロにできる。

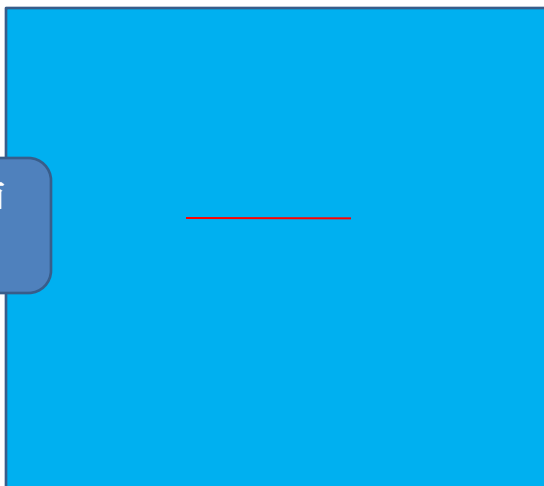
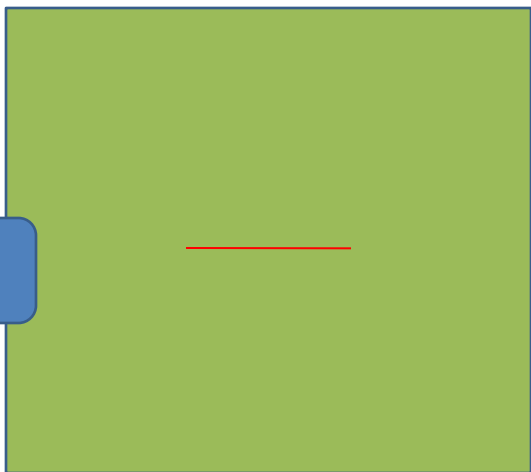
反射をゼロにできる。



# 共形変換


w-space

仮想的な数学的空間



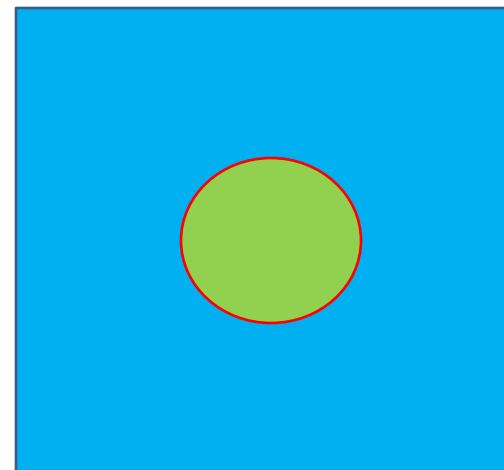
第2リーマン面  
n:次のスライド

第1リーマン面  
n=1

$$w = z + \frac{a^2}{z}$$


z-space

物理的空間



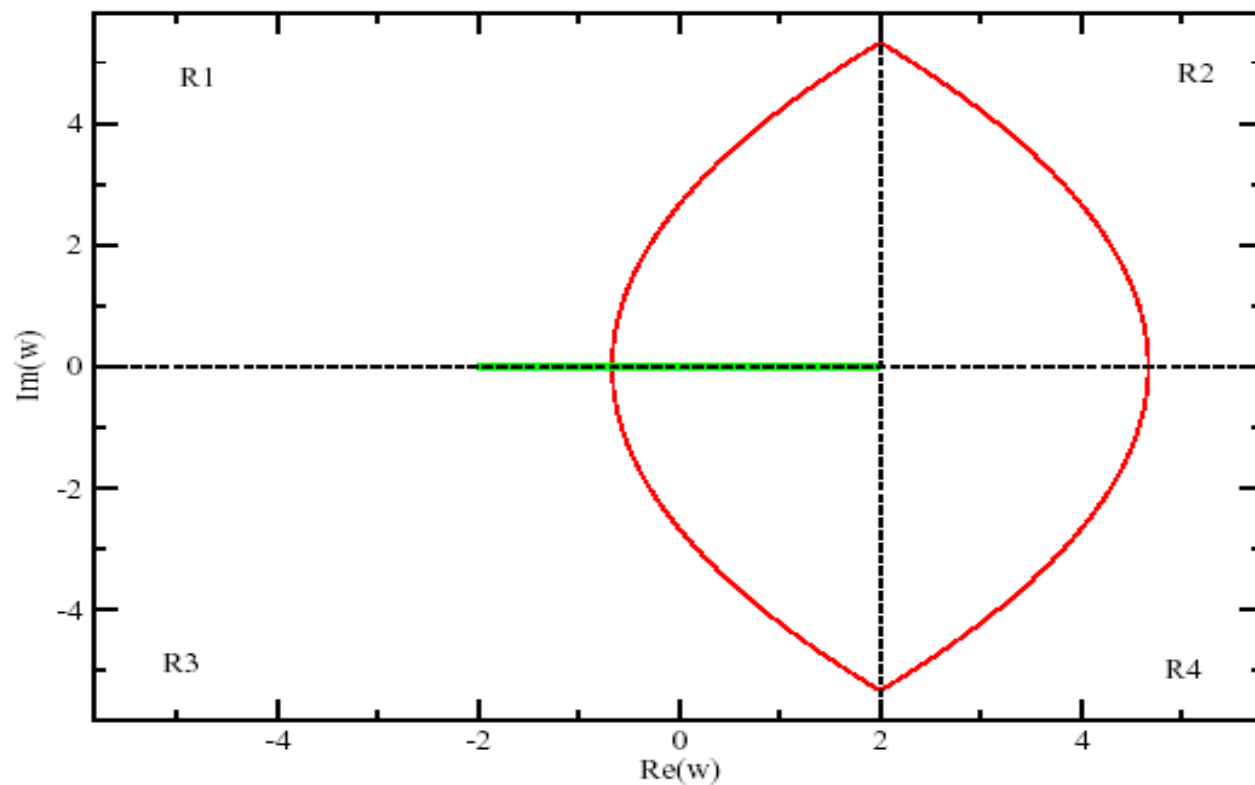
# リーマン面上の屈折率

w-spaceの第2リーマン面の屈折率は以下で与えられる。

$$n = \sqrt{2E - 2U(x)}$$
$$= \begin{cases} \sqrt{2E - 2A(2a - x)} & (\text{R1 : } x < 2a \text{ and } y > 0) \\ -\sqrt{2E + 2A(2a - x)} & (\text{R2 : } x > 2a \text{ and } y > 0) \\ \sqrt{2E + 2A(2a - x)} & (\text{R3 : } x > 2a \text{ and } y < 0) \\ -\sqrt{2E - 2A(2a - x)} & (\text{R4 : } x < 2a \text{ and } y < 0) \end{cases}$$

# w-spaceの第2リーマン面における光の軌跡

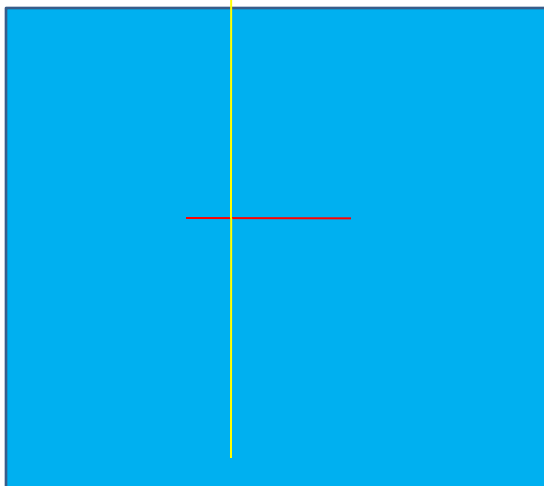
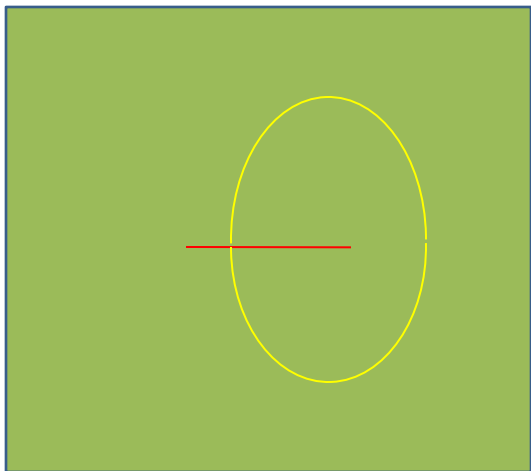
Trajectory of light




# 物理空間における光の軌跡

w-space

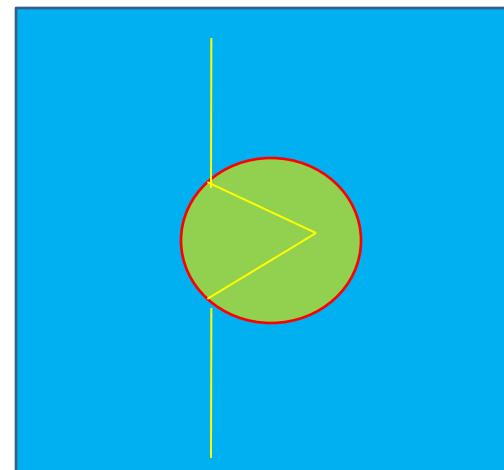
仮想的な数学的空間



$$w = z + \frac{a^2}{z}$$


z-space

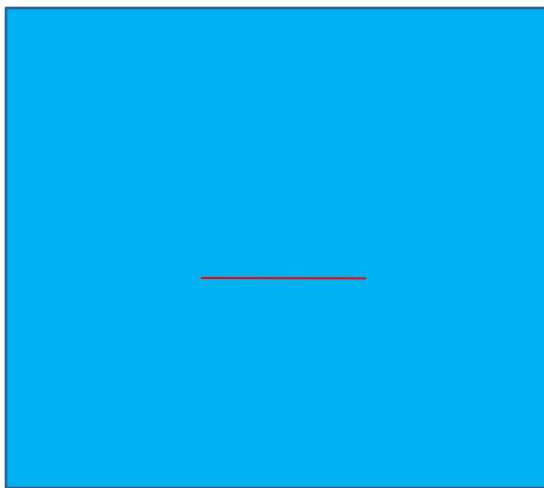
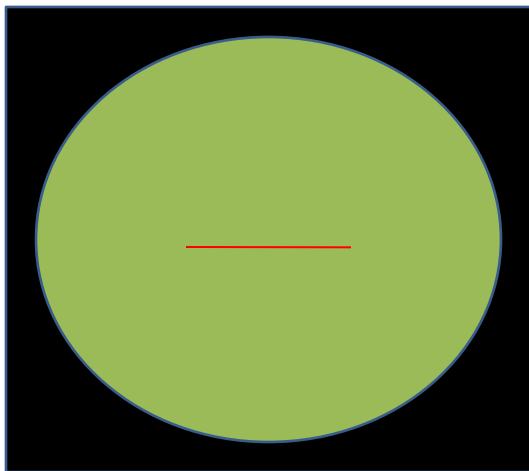
物理的空間




# 不可視領域

w-space

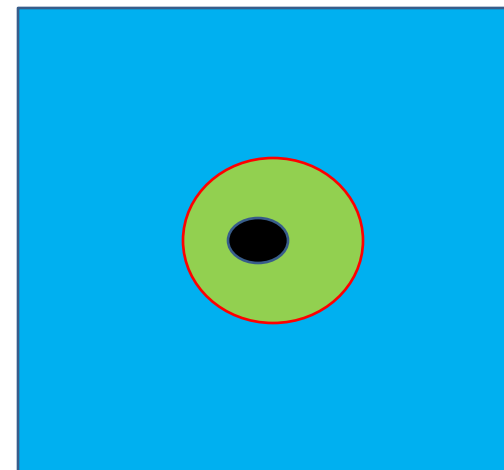
仮想的な数学的空間



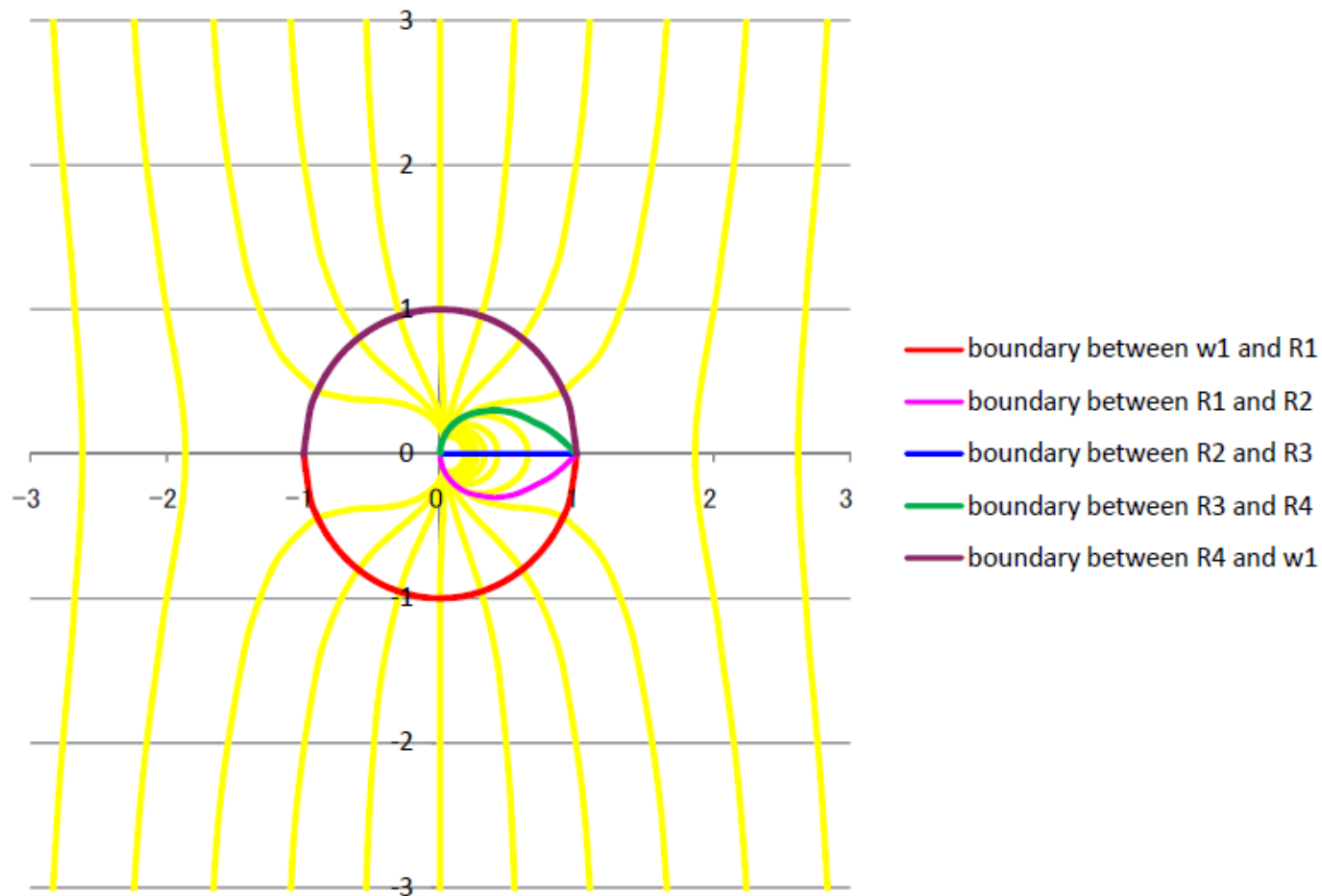
$$w = z + \frac{a^2}{z}$$


z-space

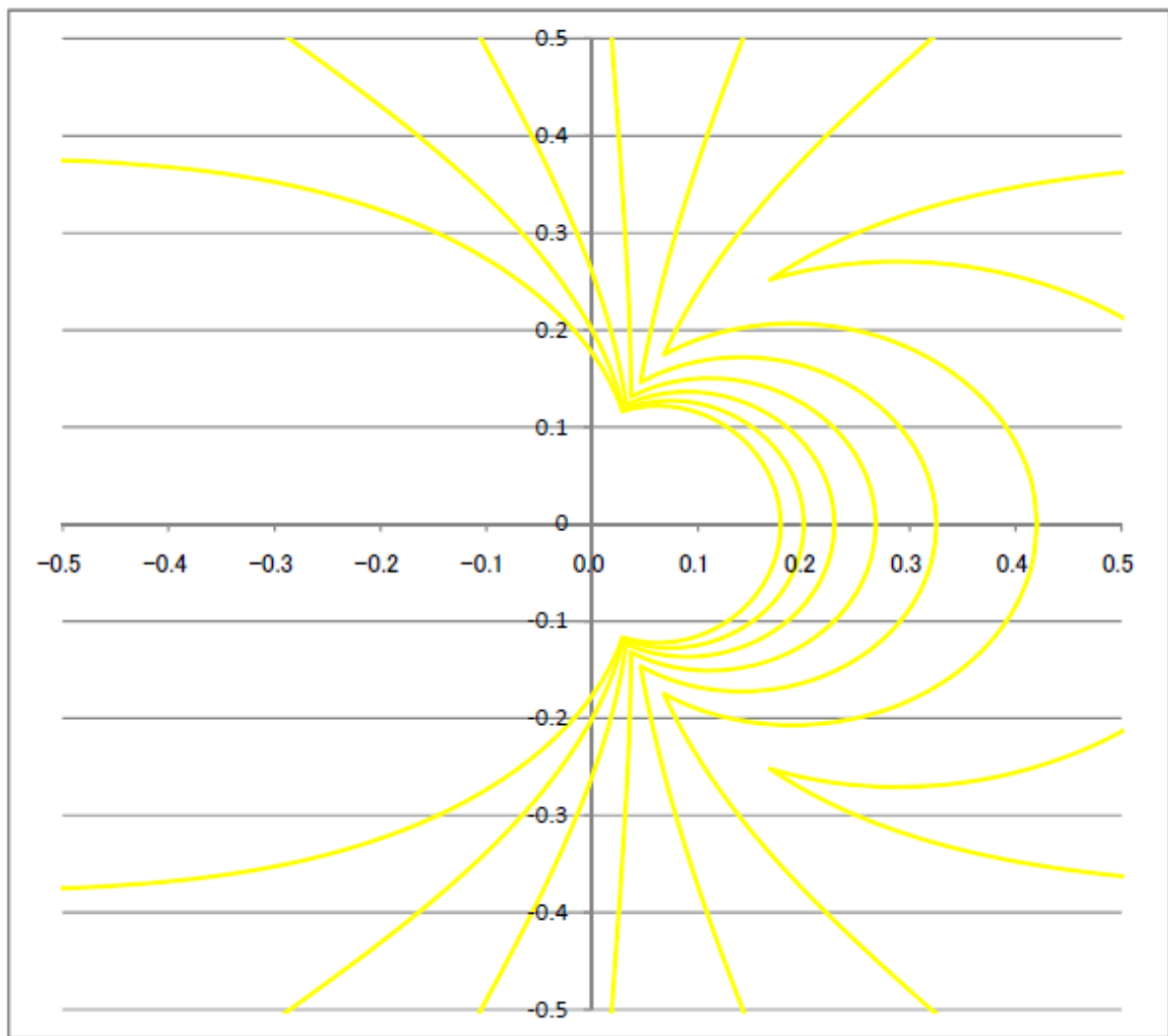
物理的空間



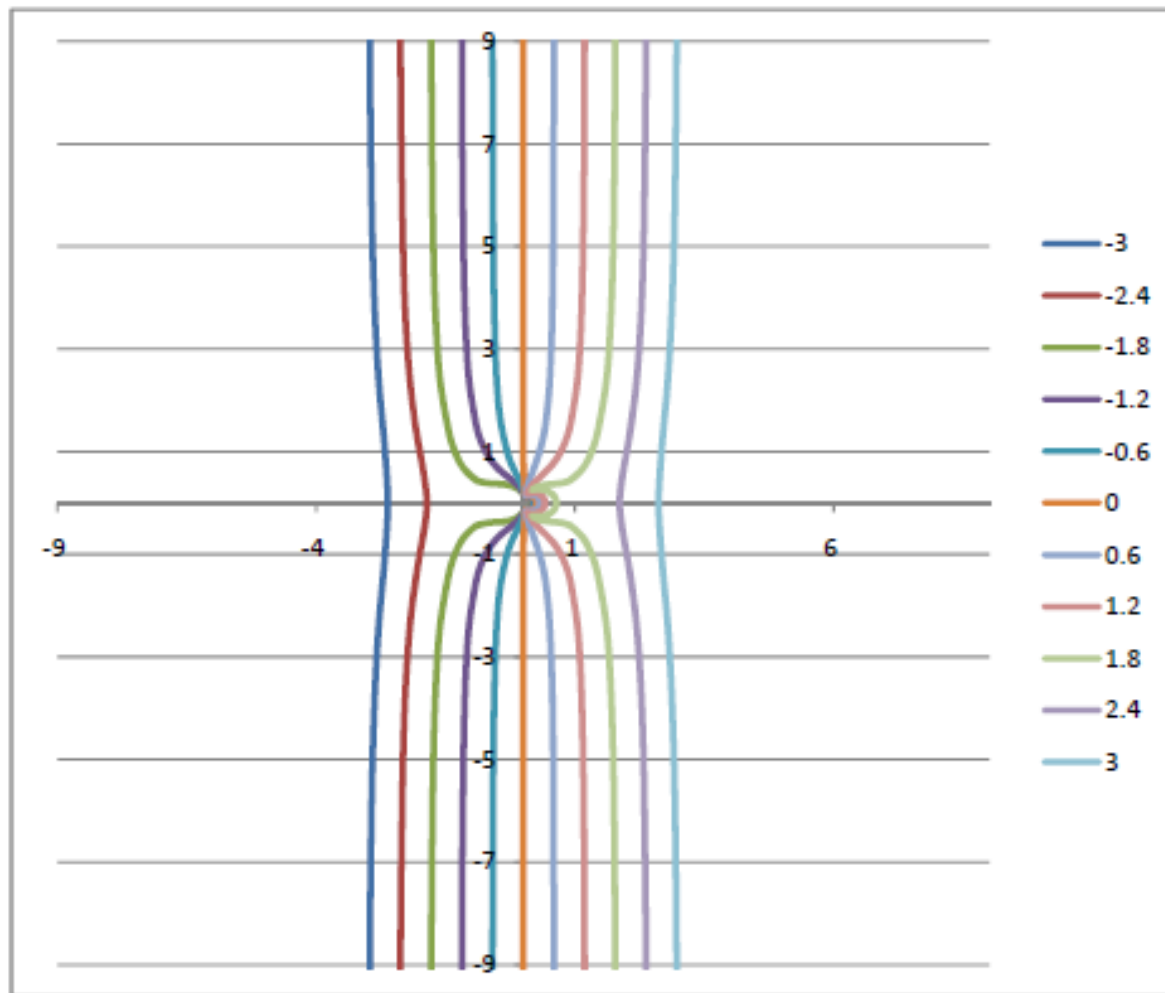
# 光線の軌跡（シミュレーション）



# 光線の軌跡（拡大図）

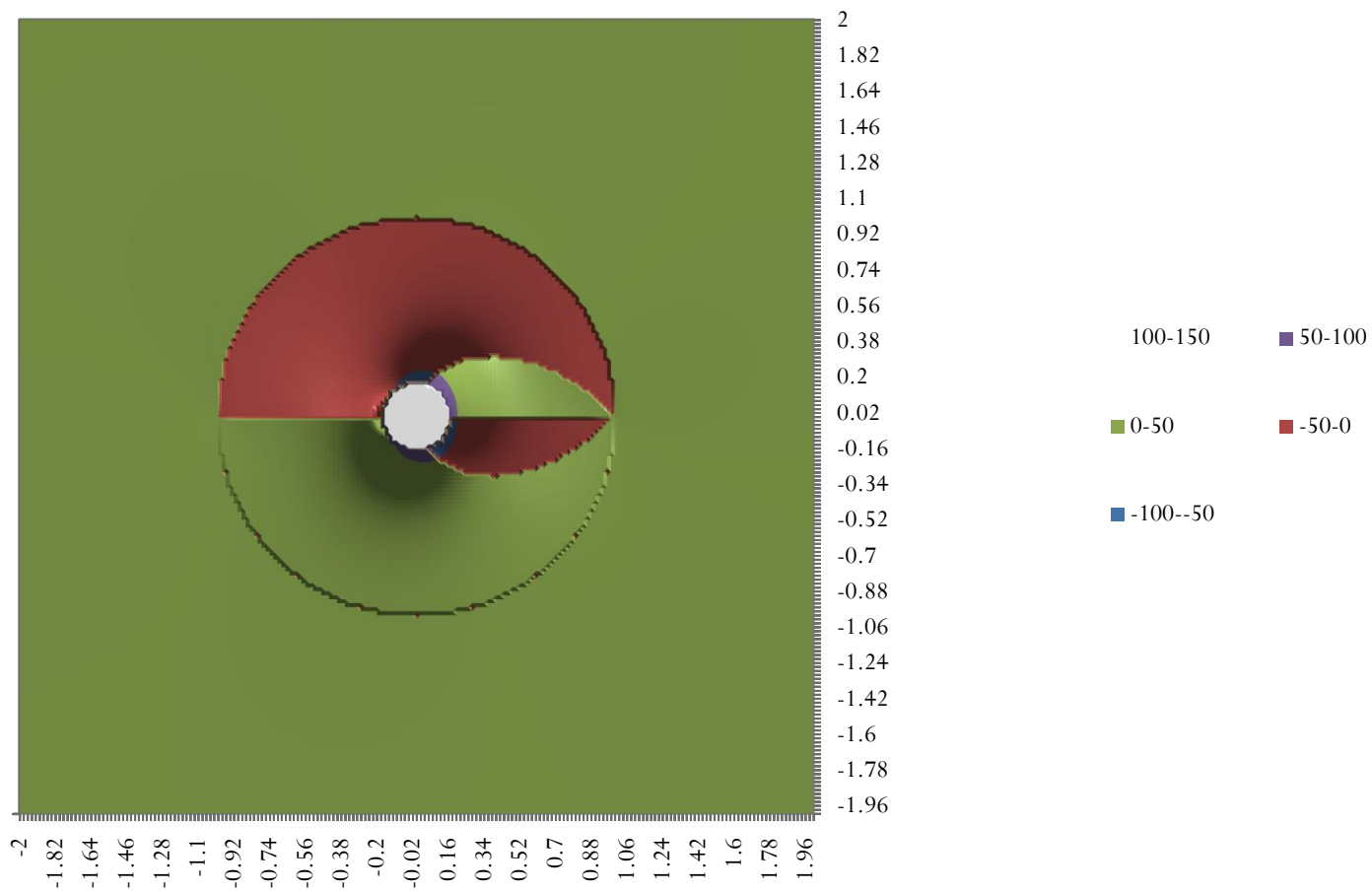


# 光線の軌跡（縮小図）





# 屈折率分布



# 時間遅れ（位相遅延）（1）

時間遅れの計算は共形不変なので、

$$cT = \int n_z |dz| = \int n_w |dw|.$$

R 2 領域の時間遅れは、R 1 領域と絶対値が同じで逆符号である。（なぜならば、R 2 領域の屈折率は R 1 領域の屈折率と符号だけ違うからである。）

$$cT_{R1} = \int_{C_1} n_w |dw| = - \int_{C_2} n_w |dw| = -cT_{R2},$$

ここで

$$cT_{R1} = \left( 2E - \frac{2}{3}v_x^2 - \frac{4}{3}A(2a - x_0) \right) \frac{-v_x + \sqrt{v_x^2 + 2A(2a - x_0)}}{A} + \frac{2}{3}v_x(2a - x).$$

## 時間遅れ（位相遅延）（2）

それゆえ、第二リーマン面における時間遅れは完全に打ち消しあい、ゼロとなる。

$$cT_{\text{total}} = cT_{R1} + cT_{R2} + cT_{R3} + cT_{R4} = 0.$$

**時間遅れゼロ**

# 左手系メタマテリアルの反射の性質 (1)

i. Eが入射面に垂直の時、反射率は以下であたえられる。

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}} \cos \phi - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}}{\sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}} \cos \phi + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}},$$

ii. Eが入射面に平行の時、反射率は以下であたえられる。

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cos \phi - \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cos \phi + \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}}.$$

# 左手系メタマテリアルの反射の性質 (2)

(1) インピーダンスマッチングの場合 ( $Z=Z'$ )

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos \phi - \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}}{\cos \phi + \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \phi}}.$$

等方性媒質の場合、一般的には屈折率が不連続になる境界では、すべての角度で反射をゼロにすることができない。  
ところが、

# 左手系メタマテリアルの反射の性質 (3)

(2) 垂直入射の時、

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} - \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}.$$

(3) (1) より2つの媒質の間の誘電率と透磁率に  $\epsilon = -\epsilon'$  and  $\mu = -\mu'$  の関係がある時、**すべての角度で反射がゼロになる。**

$$\frac{E_r}{E_i} = 0.$$

# R1領域とR2領域の境界における反射

R1領域とR2領域の境界において、次のような形をとれば反射がすべての角度でゼロになる。

$$\epsilon_{R1} = -\epsilon_{R2} \quad (\text{at the boundary between R1 and R2}),$$

$$\mu_{R1} = -\mu_{R2} \quad (\text{at the boundary between R1 and R2}),$$

この形は次の関係を与える。

$$n_{R1} = -n_{R2} \quad (\text{at the boundary between R1 and R2}),$$

R1とR2領域の境界で、すべての入射角で反射がゼロ。  
他の境界も同様に、すべての入射角度で反射がゼロ

# 研究成果のまとめ

- (1) 負の屈折率を持つマテリアル（左手系メタマテリアル）を用いて、等方性媒質の透明マントを構成した。
- (2) 負の屈折率を持つマテリアルの性質により、時間遅れ（位相遅延）と反射の両方をゼロにすることができた、
- (3) Nachmanの定理は、等方性媒質を用いた完全な透明マントは存在しないことを証明しているが、この結果は、Nachmanの定理として知られる不可能定理の困難を乗り越える（打ち破る）ものである。

**この結果は、等方性媒質を用いた完全な透明マントが存在することを示す。**



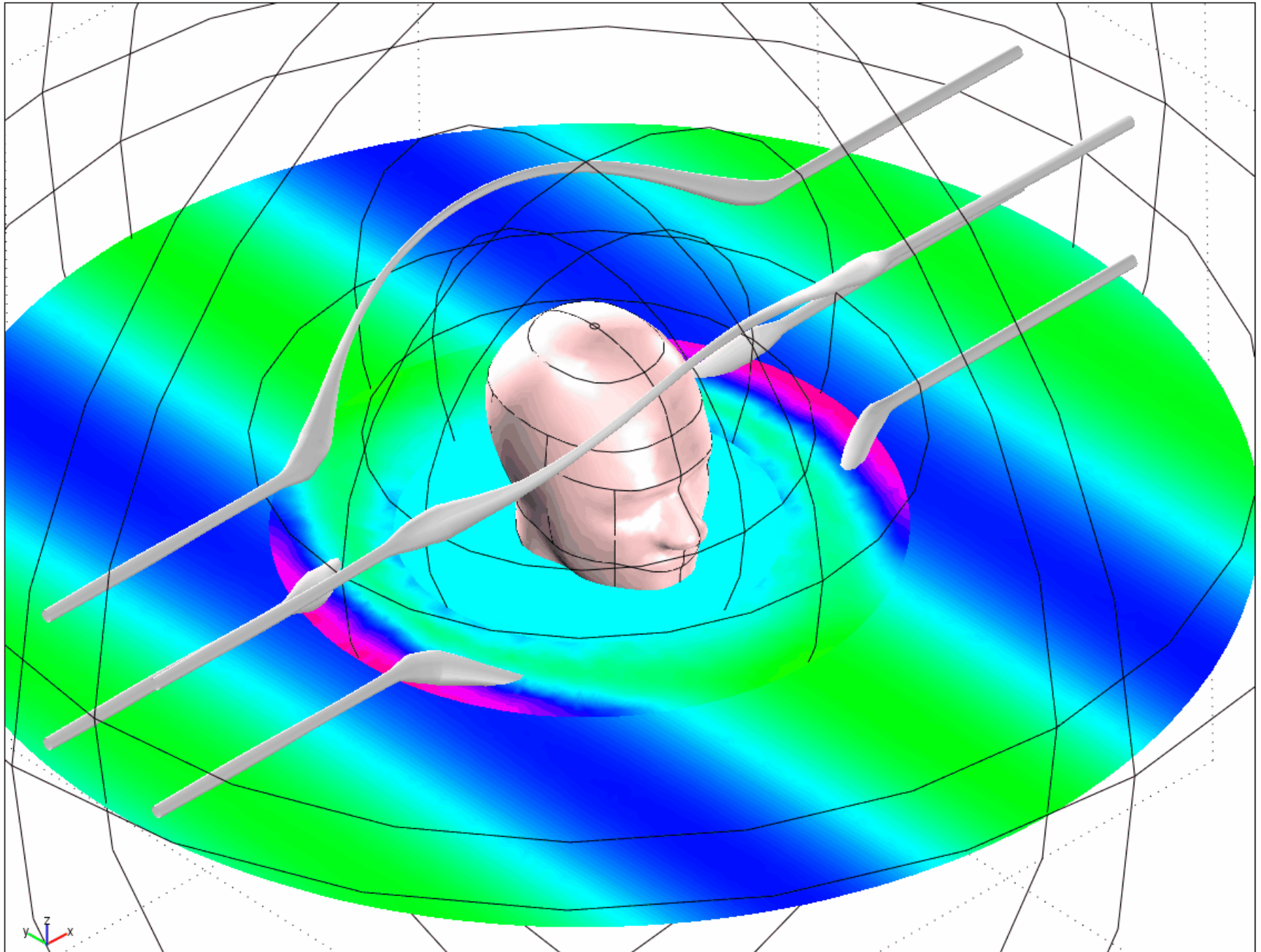
# 今後の展開

- (1) 等方性材料の透明マントの組織的な構成方法の研究 (共形不変性)
- (2) 異方性材料の透明マントの研究 (一般座標変換)
- (3) 必要な誘電率、透磁率 (屈折率) を生み出す材料設計の研究 (メタ材料の研究)

# 参考文献

- [1] J. B. Pendry et al., Controlling Electromagnetic Fields *Science* 312, 1780 (2006)
- [2] D. Schurig et al., Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies, *Science* 314, 977 (2006)
- [3] U. Leonhardt, Optical Conformal Mapping, *Science* 312, 1777-1780 (2006).
- [4] U. Leonhardt, Notes on Conformal Invisibility Devices, *New J. Phys.* 8,(2006).
- [5] T. Ochiai, U. Leonhardt and J.C. Nacher : A novel design of dielectric perfect invisibility devices, *Journal of Mathematical Physics*, 49, 032903 (2008).

Slice: Magnetic flux density, y component [T] Boundary: epsilon\_rfw Streamline: Power flow, time average Streamline Color: Magnetic energy density, time average [J/m] Streamline Radius: Electric energy density, time average



Thank you

ありがとうございました。